

Matematická analýza 1

ZS 2025-26

Miroslav Zelený

1. Logika, množiny a základní číselné obory ▶
2. Limita posloupnosti ▶
3. Limita a spojitost funkce ▶
4. Elementární funkce ▶
5. Derivace ▶
6. Taylorův polynom ▶

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- cvičení,

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- cvičení,
- konzultace,

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- cvičení,
- konzultace,
- tutorial,

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- cvičení,
- konzultace,
- tutorial,
- proseminář.

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- cvičení,
- konzultace,
- tutorial,
- proseminář.

Podmínky

- udělení zápočtu,

Návod k použití kurzu

Co je

- přednáška,
- cvičení,
- konzultace,
- tutorial,
- proseminář.

Podmínky

- udělení zápočtu,
- složení zkoušky.

1. Logika, množiny a základní číselné obory

1.1 Logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé), nebo že neplatí (je nepravdivé).

1.1 Logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé), nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice

Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A .

1.1 Logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé), nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice

Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A .

A	$\neg A$
0	1

1.1 Logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé), nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice

Negací $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A .

A	$\neg A$
0	1
1	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B .

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B .

A	B	$A \wedge B$
0	0	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B .

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B .

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0

Definice

Konjunkcí $A \wedge B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B .

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B .

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B .

A	B	$A \vee B$
0	0	0

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B .

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B .

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B .

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Definice

Disjunkcí $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B .

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A , potom platí výrok B .

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A , potom platí výrok B .

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**.

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A , potom platí výrok B .

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A .

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A , potom platí výrok B .

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A .

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A , potom platí výrok B .

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A .

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A , potom platí výrok B .

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A .

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A , potom platí výrok B .

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A .

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Definice

Implikací $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A , potom platí výrok B .

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**. Výrok A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A .

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B .

Definice

Ekvivalencí $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B .

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1

Definice

Ekvivalenci $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B .

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0

Definice

Ekvivalenci $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B .

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0

Definice

Ekvivalenci $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B .

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definice

Ekvivalenci $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B .

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(Platnost výroku) A je **nutnou a postačující** podmínkou
(platnosti výroku) B .

Výroková forma V je výraz, který má konečný počet proměnných, přičemž když za tyto proměnné dosadíme prvky z daného oboru, obdržíme výrok.

Definice

Nechť V je výroková forma s jednou proměnnou.

Definice

Nechť V je výroková forma s jednou proměnnou.

(a) Výrok „Pro každé x platí $V(x)$.“ symbolicky zapisujeme ve tvaru

$$\forall x: V(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným kvantifikátorem**.

Definice

Nechť V je výroková forma s jednou proměnnou.

(a) Výrok „Pro každé x platí $V(x)$.“ symbolicky zapisujeme ve tvaru

$$\forall x: V(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným kvantifikátorem**.

(b) Výrok „Existuje x takové, že platí $V(x)$.“ zapisujeme ve tvaru

$$\exists x: V(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním kvantifikátorem**.

1.2 Metody důkazu

1.2 Metody důkazů

- přímý důkaz

1.2 Metody důkazů

- přímý důkaz
- nepřímý důkaz

1.2 Metody důkazů

- přímý důkaz
- nepřímý důkaz
- důkaz sporem

1.2 Metody důkazů

- přímý důkaz
- nepřímý důkaz
- důkaz sporem
- důkaz rozbořem případů

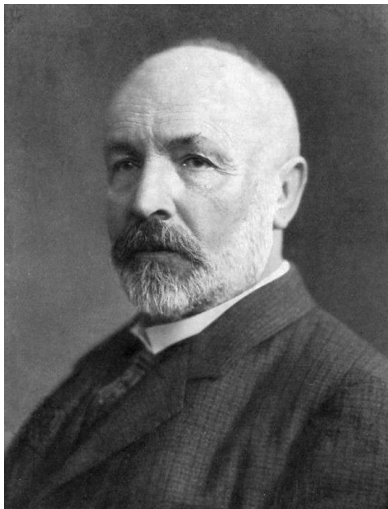
1.2 Metody důkazů

- přímý důkaz
- nepřímý důkaz
- důkaz sporem
- důkaz rozbořem případů
- důkaz matematickou indukcí

1.3 Množiny

G. Cantor: „**Množinou** rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů, které nazýváme **prvky**, do jediného celku.“

Georg Cantor (1845–1918)



Množinu definujeme výčtem prvků nebo pomocí vlastnosti, kterou musejí splňovat její prvky, tj. píšeme $\{x \in M; V(x)\}$, kde M je množina a V je výroková forma.

Definice

Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B . Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$.

Definice

Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B . Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$. Množiny A a B jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky. **Prázdnou množinou** nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem $\emptyset$.

Definice

Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B .

Definice

Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B . Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Definice

Sjednocením množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B . Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a , pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

Definice

Průnikem množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B . Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$.

Definice

Průnikem množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B . Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li množiny A a B prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Definice

Průnikem množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B . Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li množiny A a B prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a , které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$.

Definice

Rozdílem množin A a B nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B . Rozdíl množin A a B značíme $A \setminus B$.

Definice

Kartézským součinem množin $A_1, \dots, A_n$ nazveme množinu všech uspořádaných n -tic

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \\ = \{[a_1, a_2, \dots, a_n]; a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}. \end{aligned}$$

Věta 1.1 (de Morganova pravidla)

*Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin.
Pak platí*

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}.$$

Augustus de Morgan (1806–1871)



Kurt Gödel (1906–1978)



1.4 Relace uspořádání a zobrazení

Definice

Binární relací rozumíme libovolnou množinu uspořádaných dvojic. Pokud R je binární relace a $[a, b] \in R$, pak říkáme, že prvek a je v relaci R s prvkem b . Často v tomto případě používáme zápis $a R b$. Pokud binární relace R splňuje $R \subset A \times B$, pak říkáme, že R je **binární relací mezi prvky množin A a B** . Pokud $A = B$, pak říkáme, že R je **binární relací na A** .

Definice

Nechť X je množina a R je relace na X . Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže pro každé $x \in X$ platí $[x, x] \in R$,

Definice

Nechť X je množina a R je relace na X . Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže pro každé $x \in X$ platí $[x, x] \in R$,
- **symetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \in R$,

Definice

Nechť X je množina a R je relace na X . Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže pro každé $x \in X$ platí $[x, x] \in R$,
- **symetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \in R$,
- **tranzitivní**, jestliže pro každé $x, y, z \in X$ splňující $[x, y] \in R$ a $[y, z] \in R$ platí $[x, z] \in R$,

Definice

Nechť X je množina a R je relace na X . Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže pro každé $x \in X$ platí $[x, x] \in R$,
- **symetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \in R$,
- **tranzitivní**, jestliže pro každé $x, y, z \in X$ splňující $[x, y] \in R$ a $[y, z] \in R$ platí $[x, z] \in R$,
- **antisymetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \notin R$,

Definice

Nechť X je množina a R je relace na X . Řekneme, že R je

- **reflexivní**, jestliže pro každé $x \in X$ platí $[x, x] \in R$,
- **symetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \in R$,
- **tranzitivní**, jestliže pro každé $x, y, z \in X$ splňující $[x, y] \in R$ a $[y, z] \in R$ platí $[x, z] \in R$,
- **antisymetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ platí $[y, x] \notin R$,
- **slabě antisymetrická**, jestliže pro každé $x, y \in X$ splňující $[x, y] \in R$ a $[y, x] \in R$ platí $x = y$.

Definice

Nechť R je relace na množině A . Řekneme, že R je na A

- **uspořádání** (někdy také **částečné uspořádání** či **neostré uspořádání**), jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní,
- **ostré uspořádání**, jestliže je antisymetrická a tranzitivní,
- **lineární uspořádání**, jestliže jde o uspořádání a pro každé $x, y \in A$ platí $[x, y] \in R$ nebo $[y, x] \in R$.

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$.

Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **maximálním** prvkem (**maximem**) množiny A , jestliže $x \in A$ a neexistuje $a \in A$ takové, že $x \leq a$ a $x \neq a$,
- **největším** prvkem množiny A , jestliže $x \in A$ a pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$.

Pojmy **minimální** prvek (**minimum**) množiny a **nejmenší** prvek množiny jsou definovány zřejmým způsobem.

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$.

Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$.
Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$.
Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A ,

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$.
Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A ,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je dolní závorou množiny A ,

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$.
Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A ,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je dolní závorou množiny A ,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $M \subset X$.
Řekneme, že prvek $G \in X$ je **supremem množiny** M ,
jestliže platí:

- (a) G je horní závorou množiny M ,

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $M \subset X$.
Řekneme, že prvek $G \in X$ je **supremem množiny** M ,
jestliže platí:

- (a) G je horní závorou množiny M ,
- (b) je-li prvek $G' \in X$ horní závorou množiny M , potom
 $G \leq G'$.

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $M \subset X$.
Řekneme, že prvek $G \in X$ je **supremem množiny** M ,
jestliže platí:

- (a) G je horní závorou množiny M ,
- (b) je-li prvek $G' \in X$ horní závorou množiny M , potom
 $G \leq G'$.

Řekneme, že prvek $g \in X$ je **infimem množiny** M ,
jestliže platí

- (a) g je dolní závorou množiny M ,

Definice

Nechť $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $M \subset X$. Řekneme, že prvek $G \in X$ je **supremem množiny** M , jestliže platí:

- (a) G je horní závorou množiny M ,
- (b) je-li prvek $G' \in X$ horní závorou množiny M , potom $G \leq G'$.

Řekneme, že prvek $g \in X$ je **infimem množiny** M , jestliže platí

- (a) g je dolní závorou množiny M ,
- (b) je-li prvek $g' \in X$ dolní závorou množiny M , potom $g' \leq g$.

Věta 1.2

Necht' $\leq$ je relace uspořádání na množině X , $M \subset X$ je neprázdná množina a existuje infimum a supremum množiny M . Potom platí $\inf M \leq \sup M$.

Definice

Binární relaci F nazýváme **zobrazením**, pokud splňuje

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2: (([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2).$$

Řekneme, že zobrazení F je **zobrazení z množiny A do množiny B** , jestliže platí $F \subset A \times B$.

Definice

Binární relaci F nazýváme **zobrazením**, pokud splňuje

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2: (([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2).$$

Řekneme, že zobrazení F je **zobrazení z množiny A do množiny B** , jestliže platí $F \subset A \times B$.

Definice

Nechť F je zobrazení.

- **Definičním oborem** zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{D}(F) = \{x; \exists y: [x, y] \in F\}.$$

Pro $x \in \mathcal{D}(F)$ označujeme jednoznačně určený prvek y splňující $[x, y] \in F$ symbolem $F(x)$.

Definice

Nechť F je zobrazení.

- **Definičním oborem** zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{D}(F) = \{x; \exists y: [x, y] \in F\}.$$

Pro $x \in \mathcal{D}(F)$ označujeme jednoznačně určený prvek y splňující $[x, y] \in F$ symbolem $F(x)$.

- **Oborem hodnot** zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{H}(F) = \{y; \exists x: [x, y] \in F\}.$$

Označení

Nechť A a B jsou množiny a F je zobrazení.

(a) Pak symbol $F: A \rightarrow B$ znamená, že F je zobrazení z množiny A do množiny B a $\mathcal{D}(F) = A$. Takové zobrazení F nazýváme také **zobrazením množiny A do množiny B** .

Označení

Nechť A a B jsou množiny a F je zobrazení.

(a) Pak symbol $F: A \rightarrow B$ znamená, že F je zobrazení z množiny A do množiny B a $\mathcal{D}(F) = A$. Takové zobrazení F nazýváme také **zobrazením množiny A do množiny B** .

(b) Pokud je $B = \mathbf{R}$, pak místo termínu zobrazení používáme termín **funkce**.

Označení

Nechť A a B jsou množiny a F je zobrazení.

(a) Pak symbol $F: A \rightarrow B$ znamená, že F je zobrazení z množiny A do množiny B a $\mathcal{D}(F) = A$. Takové zobrazení F nazýváme také **zobrazením množiny A do množiny B** .

(b) Pokud je $B = \mathbf{R}$, pak místo termínu zobrazení používáme termín **funkce**.

Definice

Nechť A, B jsou množiny a f je zobrazení.

- **Obrazem množiny A** při zobrazení f rozumíme množinu

$$\{y \in \mathcal{H}(f); \exists x \in \mathcal{D}(f) \cap A: f(x) = y\},$$

kterou značíme $f(A)$.

Definice

Nechť A, B jsou množiny a f je zobrazení.

- **Obrazem množiny A** při zobrazení f rozumíme množinu

$$\{y \in \mathcal{H}(f); \exists x \in \mathcal{D}(f) \cap A: f(x) = y\},$$

kterou značíme $f(A)$.

- **Vzorem množiny B** při zobrazení f rozumíme množinu

$$\{x \in \mathcal{D}(f); f(x) \in B\},$$

kterou značíme $f^{-1}(B)$.

Definice

Řekneme, že zobrazení f

- je **prosté**, jestliže platí

$$\forall x, y \in \mathcal{D}(f): f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,$$

Definice

Řekneme, že zobrazení f

- je **prosté**, jestliže platí

$$\forall x, y \in \mathcal{D}(f): f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,$$

- je **na množinu** B , jestliže platí $\mathcal{H}(f) = B$,

Definice

Řekneme, že zobrazení f

- je **prosté**, jestliže platí

$$\forall x, y \in \mathcal{D}(f): f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,$$

- je **na množinu** B , jestliže platí $\mathcal{H}(f) = B$,
- je **bijekcí množiny** A **na množinu** B , jestliže $\mathcal{D}(f) = A$ a jde o prosté zobrazení na B .

Definice

Nechť f je zobrazení a C je množina. Pak zobrazení definované předpisem $x \mapsto f(x)$, $x \in C \cap \mathcal{D}(f)$, nazýváme **restrikcí** nebo **zúžením** zobrazení f na množinu C a značíme jej $f|_C$.

Definice

Nechť f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$.

Definice

Nechť f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením (složením zobrazení)** f a g , přičemž g nazýváme **vnějším** zobrazením a f nazýváme **vnitřním** zobrazením.

Definice

Nechť $f: A \rightarrow B$ je prosté zobrazení. Pak zobrazení $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ definované pro $y \in f(A)$ předpisem $f^{-1}(y) = x$, kde $x \in A$ je jednoznačně určeno vztahem $y = f(x)$, nazýváme **inverzním zobrazením** k zobrazení f .

Definice

Nechť A je neprázdná množina.

- (a) **Konečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbf{N}$, do množiny A .

Definice

Nechť A je neprázdná množina.

- (a) **Konečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbf{N}$, do množiny A . Pokud $k \mapsto a_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme $\{a_k\}_{k=1}^n$. Prvek a_k nazýváme **k -tým členem** této posloupnosti.

Definice

Nechť A je neprázdná množina.

- (a) **Konečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbf{N}$, do množiny A . Pokud $k \mapsto a_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme $\{a_k\}_{k=1}^n$. Prvek a_k nazýváme **k -tým členem** této posloupnosti.
- (b) **Nekonečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbf{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbf{N}$ do množiny A .

Definice

Nechť A je neprázdná množina.

- (a) **Konečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbf{N}$, do množiny A . Pokud $k \mapsto a_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme $\{a_k\}_{k=1}^n$. Prvek a_k nazýváme **k -tým členem** této posloupnosti.
- (b) **Nekonečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbf{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbf{N}$ do množiny A . Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, případně jen $\{a_n\}$. Prvek a_n nazýváme **n -tým členem** této posloupnosti.

1.5 Konečné a spočetné množiny

Definice

(a) Řekneme, že množina A **má stejnou mohutnost** jako množina B , jestliže existuje bijekce A na B . Značíme $A \approx B$.

1.5 Konečné a spočetné množiny

Definice

(a) Řekneme, že množina A **má stejnou mohutnost** jako množina B , jestliže existuje bijekce A na B . Značíme $A \approx B$.

(b) Řekneme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B , jestliže existuje prosté zobrazení A do B . Značíme $A \preceq B$.

1.5 Konečné a spočetné množiny

Definice

(a) Řekneme, že množina A **má stejnou mohutnost** jako množina B , jestliže existuje bijekce A na B . Značíme $A \approx B$.

(b) Řekneme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B , jestliže existuje prosté zobrazení A do B . Značíme $A \preceq B$.

(c) Řekneme, že množina A **má menší mohutnost než množina** B , jestliže existuje prosté zobrazení A do B a přitom A nemá stejnou mohutnost jako B . Značíme $A \prec B$.

1.5 Konečné a spočetné množiny

Definice

(a) Řekneme, že množina A **má stejnou mohutnost** jako množina B , jestliže existuje bijekce A na B . Značíme $A \approx B$.

(b) Řekneme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B , jestliže existuje prosté zobrazení A do B . Značíme $A \preceq B$.

(c) Řekneme, že množina A **má menší mohutnost než množina** B , jestliže existuje prosté zobrazení A do B a přitom A nemá stejnou mohutnost jako B . Značíme $A \prec B$.

Definice

Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \dots, n\}$.

Definice

Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \dots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, pokud není konečná.

Definice

Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \dots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, pokud není konečná. Řekneme, že množina X je **spočetná**, jestliže je konečná, nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbf{N}$.

Definice

Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \dots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, pokud není konečná.

Řekneme, že množina X je **spočetná**, jestliže je konečná, nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbf{N}$. Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Definice

Řekneme, že množina X je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbf{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \dots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, pokud není konečná.

Řekneme, že množina X je **spočetná**, jestliže je konečná, nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbf{N}$. Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Poznámka

Pro počet prvků konečné množiny X používáme často značení $|X|$. Dvě konečné množiny X, Y mají stejnou mohutnost právě tehdy, když $|X| = |Y|$.

Věta 1.3 (Cantor–Bernstein)

Nechť A, B jsou množiny takové, že $A \preceq B$ a zároveň $B \preceq A$. Pak A a B mají stejnou mohutnost.

Věta 1.4 (Cantor)

Necht' X je množina. Pak $X \prec \mathcal{P}(X)$, kde $\mathcal{P}(X)$ je množina všech podmnožin množiny X .

Věta 1.5 (vlastnosti spočetných množin)

(a) *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*

Věta 1.5 (vlastnosti spočetných množin)

- (a) *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*
- (b) *Nechť zobrazení $f: A \rightarrow \mathbf{N}$ je prosté. Potom je množina A spočetná.*

Věta 1.5 (vlastnosti spočetných množin)

- (a) *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*
- (b) *Nechť zobrazení $f: A \rightarrow \mathbf{N}$ je prosté. Potom je množina A spočetná.*
- (c) *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.*

Věta 1.5 (vlastnosti spočetných množin)

- (a) *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*
- (b) *Nechť zobrazení $f: A \rightarrow \mathbf{N}$ je prosté. Potom je množina A spočetná.*
- (c) *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.*
- (d) *Obraz spočetné množiny je spočetná množina.*

Věta 1.5 (vlastnosti spočetných množin)

- (a) *Podmnožina spočetné množiny je spočetná.*
- (b) *Nechť zobrazení $f: A \rightarrow \mathbf{N}$ je prosté. Potom je množina A spočetná.*
- (c) *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.*
- (d) *Obraz spočetné množiny je spočetná množina.*
- (e) *Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.*

1.6 Číselné obory

Množinu reálných čísel **$\mathbf{R}$** lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

1.6 Číselné obory

Množinu reálných čísel **R** lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

1. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

1.6 Číselné obory

Množinu reálných čísel **R** lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

- I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah
- II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

1.6 Číselné obory

Množinu reálných čísel **R** lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

- I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah
- II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení
- III. Vlastnost suprema: *Každá neprázdná shora omezená podmnožina **R** má supremum.*

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: x + (y + z) = (x + y) + z$ (**asociativita sčítání**),

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: x + (y + z) = (x + y) + z$ (**asociativita sčítání**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: x + y = y + x$ (**komutativita sčítání**),

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: x + (y + z) = (x + y) + z$ (**asociativita sčítání**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: x + y = y + x$ (**komutativita sčítání**),
- $\exists w \in \mathbf{R} \forall x \in \mathbf{R}: w + x = x$ (prvek w je určen jednoznačně, značíme ho 0 a říkáme mu **nulový prvek**),

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: x + (y + z) = (x + y) + z$ (**asociativita sčítání**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: x + y = y + x$ (**komutativita sčítání**),
- $\exists w \in \mathbf{R} \forall x \in \mathbf{R}: w + x = x$ (prvek w je určen jednoznačně, značíme ho 0 a říkáme mu **nulový prvek**),
- $\forall x \in \mathbf{R} \exists z \in \mathbf{R}: x + z = 0$ (z je tzv. **opačné číslo** k číslu x , je určeno jednoznačně a značíme ho $-x$),

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),
- $\exists v \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \forall x \in \mathbf{R}: v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme ho 1 a říkáme mu **jednotkový prvek**),

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),
- $\exists v \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \forall x \in \mathbf{R}: v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme ho 1 a říkáme mu **jednotkový prvek**),
- $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbf{R}: x \cdot y = 1$ (prvek y je určen jednoznačně a značíme ho x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),
- $\exists v \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \forall x \in \mathbf{R}: v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme ho 1 a říkáme mu **jednotkový prvek**),
- $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbf{R}: x \cdot y = 1$ (prvek y je určen jednoznačně a značíme ho x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (**distributivita**).

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\leq$ je lineární uspořádání,

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\leq$ je lineární uspořádání,
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z,$

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\leq$ je lineární uspořádání,
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z,$
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: (0 \leq x \wedge 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y.$

Věta 1.6

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje infimum množiny M .

Věta 1.7

Ke každému $x \in \mathbf{R}$ existuje $n \in \mathbf{N}$ splňující $x < n$.

Věta 1.7

Ke každému $x \in \mathbf{R}$ existuje $n \in \mathbf{N}$ splňující $x < n$.

Věta 1.8

Pro každé $r \in \mathbf{R}$ existuje právě jedno číslo $k \in \mathbf{Z}$ takové, že $k \leq r < k + 1$.

Věta 1.9

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Pak existuje $q \in \mathbf{Q}$ takové, že $a < q < b$.

Definice

Množinu komplexních čísel $\mathbf{C}$ definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic (a, b) , kde $a, b \in \mathbf{R}$, přičemž pro komplexní čísla $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ definujeme operace **sčítání** a **násobení** takto

- $x + y = (a + c, b + d)$,
- $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$.

Nechť $x = (a, b) \in \mathbf{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x , prvek b nazýváme **imaginární částí** x .

Definice

Množinu komplexních čísel $\mathbf{C}$ definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic (a, b) , kde $a, b \in \mathbf{R}$, přičemž pro komplexní čísla $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ definujeme operace **sčítání** a **násobení** takto

- $x + y = (a + c, b + d)$,
- $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$.

Nechť $x = (a, b) \in \mathbf{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x , prvek b nazýváme **imaginární částí** x . **Absolutní hodnotou** komplexního čísla x rozumíme $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Definice

Množinu komplexních čísel $\mathbf{C}$ definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic (a, b) , kde $a, b \in \mathbf{R}$, přičemž pro komplexní čísla $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ definujeme operace **sčítání** a **násobení** takto

- $x + y = (a + c, b + d)$,
- $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$.

Nechť $x = (a, b) \in \mathbf{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x , prvek b nazýváme **imaginární částí** x . **Absolutní hodnotou** komplexního čísla x rozumíme $\sqrt{a^2 + b^2}$. Dále definujeme $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$ (sic!) a $i = (0, 1)$.

Definice

Množinu komplexních čísel $\mathbf{C}$ definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic (a, b) , kde $a, b \in \mathbf{R}$, přičemž pro komplexní čísla $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ definujeme operace **sčítání** a **násobení** takto

- $x + y = (a + c, b + d)$,
- $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$.

Nechť $x = (a, b) \in \mathbf{C}$. Prvek a nazýváme **reálnou částí** x , prvek b nazýváme **imaginární částí** x . **Absolutní hodnotou** komplexního čísla x rozumíme $\sqrt{a^2 + b^2}$. Dále definujeme $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$ (sic!) a $i = (0, 1)$.

Komplexně sdruženým číslem k x rozumíme číslo $\bar{x} = (a, -b)$; symbol $-x$ značí číslo $(-a, -b)$ a symbol $1/x$ značí pro $x \neq 0$ (jednoznačně určené) číslo splňující $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

2. Limita posloupnosti

2.1 Úvod

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,

2.1 Úvod

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,

2.1 Úvod

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí či klesající.

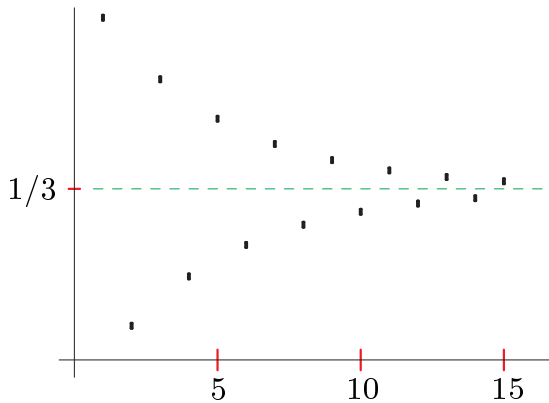
2.2 Vlastní limita posloupnosti

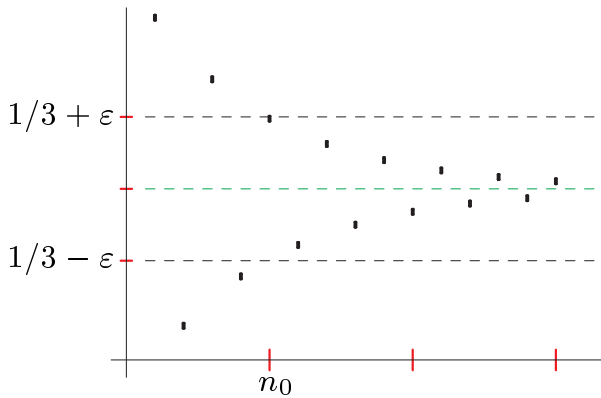
Definice

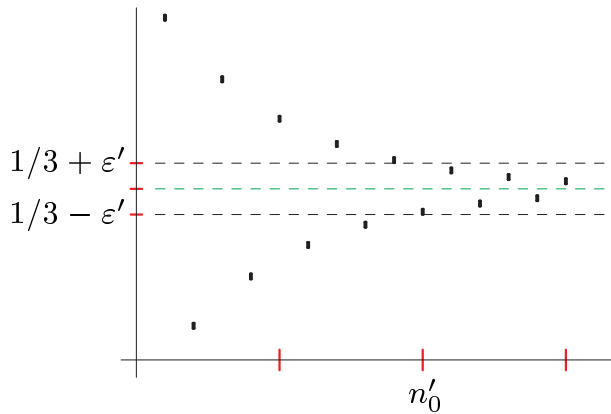
Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbf{R}$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou A** ,
jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$







Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost, která má limitu rovnou $A \in \mathbf{R}$ a zároveň má limitu rovnou $B \in \mathbf{R}$. Potom platí $A = B$.

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost, která má limitu rovnou $A \in \mathbf{R}$ a zároveň má limitu rovnou $B \in \mathbf{R}$. Potom platí $A = B$.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **konverguje** (je **konvergentní**), jestliže existuje $A \in \mathbf{R}$ takové, že $\lim a_n = A$, neboli platí

$$\exists A \in \mathbf{R} \forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost, která má limitu rovnou $A \in \mathbf{R}$ a zároveň má limitu rovnou $B \in \mathbf{R}$. Potom platí $A = B$.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **konverguje** (je **konvergentní**), jestliže existuje $A \in \mathbf{R}$ takové, že $\lim a_n = A$, neboli platí

$$\exists A \in \mathbf{R} \forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

Je-li posloupnost konvergentní, říkáme též, že má **vlastní limitu**.

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost, která má limitu rovnou $A \in \mathbf{R}$ a zároveň má limitu rovnou $B \in \mathbf{R}$. Potom platí $A = B$.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **konverguje** (je **konvergentní**), jestliže existuje $A \in \mathbf{R}$ takové, že $\lim a_n = A$, neboli platí

$$\exists A \in \mathbf{R} \forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

Je-li posloupnost konvergentní, říkáme též, že má **vlastní limitu**. Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu, pak říkáme, že **diverguje** (je **divergentní**).

Lemma 2.2

Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbf{R}$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy,

Lemma 2.2

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbf{R}$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když existuje $K \in \mathbf{R}$, $K > 0$, takové, že platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < K\varepsilon.$$

Věta 2.3

Necht' $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$. Potom $\lim |a_n| = |A|$.

Věta 2.4

Necht' $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost. Potom je $\{a_n\}$ omezená.

Věta 2.4

Necht' $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost. Potom je $\{a_n\}$ omezená.

Definice

Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazýváme **vybranou posloupností** z posloupnosti $\{a_n\}$, případně **podposloupností** posloupnosti $\{a_n\}$.

Věta 2.5

Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.5

Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.6 (aritmetika limit)

Necht' $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. Potom platí:

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B,$

Věta 2.5

Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.6 (aritmetika limit)

Necht' $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. Potom platí:

- (a) $\lim (a_n + b_n) = A + B,$
- (b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B,$

Věta 2.5

Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.6 (aritmetika limit)

Necht' $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. Potom platí:

- (a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,
- (b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
- (c) *je-li $B \neq 0$ a pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $b_n \neq 0$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.*

Věta 2.5

Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.6 (aritmetika limit)

Necht' $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. Potom platí:

- (a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,
- (b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
- (c) je-li $B \neq 0$ a pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $b_n \neq 0$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Věta 2.5

Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.6 (aritmetika limit)

Necht' $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. Potom platí:

- (a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,
- (b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
- (c) je-li $B \neq 0$ a pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $b_n \neq 0$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Věta 2.5

Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.6 (aritmetika limit)

Necht' $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. Potom platí:

- (a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,
- (b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
- (c) je-li $B \neq 0$ a pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $b_n \neq 0$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Věta 2.7

Necht' $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Pak $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 2.8 (limita a uspořádání)

Nechť $A, B \in \mathbf{R}$, $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti splňující $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.

- (a) Nechť $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$.*
- (b) Nechť existuje $n^* \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n^*$, platí $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.*

Věta 2.9 (o dvou strážnících)

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

- (a) existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$,*
- (b) $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou konvergentní a platí $\lim a_n = \lim b_n$.*

Potom je $\{c_n\}$ konvergentní a platí $\lim c_n = \lim a_n$.

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** ∞ (čteme plus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbf{R} \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: a_n > K.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** $-\infty$ (čteme mínus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbf{R} \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0: a_n < K.$$

Má-li posloupnost limitu rovnou plus nebo mínus nekonečnu, říkáme, že **má nevlastní limitu**. Jestliže má posloupnost limitu rovnou ∞ , pak říkáme, že **diverguje** k ∞ . Jestliže má posloupnost limitu rovnou $-\infty$, pak říkáme, že **diverguje** k $-\infty$.

Věta 2.10 (jednoznačnost limity podruhé)

Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost, která má limitu rovnou $A \in \mathbf{R}^$ a zároveň má limitu rovnou $B \in \mathbf{R}^*$. Potom platí $A = B$.*

Věta 2.11 (aritmetika limit podruhé)

Necht' $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^$ a $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^*$. Potom platí:*

- (a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$, pokud je výraz na pravé straně definován,*
- (b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, pokud je výraz na pravé straně definován,*
- (c) je-li $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz na pravé straně definován.*

Věta 2.12

Necht' $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

- *pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $b_n \neq 0$,*
- *$\lim a_n = A \in \mathbf{R}^*$ a $A > 0$,*
- *$\lim b_n = 0$,*
- *existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n > 0$.*

Potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.